

开孔泡沫塑料率相关的拉伸力学性能及本构关系*

卢子兴

黄筑平 王仁

(北京航空航天大学固体所 北京 100083)

(北京大学力学系 北京 100871)

摘 要 以 Lederman 的工作为基础,通过假设基体材料服从 Voigt 体描述的粘弹性本构关系,导出了开孔泡沫塑料受拉伸的率相关本构关系;在此基础上研究了泡沫塑料力学性质同应变、应变率和结构参数的关系。

关键词 材料力学性质,粘弹性性质,泡沫塑料

开孔泡沫塑料的拉伸力学性能最早由 Gent 和 Thomas^[1]利用弹性杆——刚性球模型进行了讨论. Lederman^[2]基于上述模型考虑了支柱杆的指向效应,同时引入额外的胞体结构参数,得到有限应变下的泡沫塑料拉伸应力-应变关系.由于所得的应力-应变关系依赖于基体材料的应力-应变特性,因而对于由率相关的基体材料(多数聚合物材料均是率相关的)制作的泡沫塑料来说也应具有率相关性.因此,基于 Lederman 模型,假设基体材料服从 Voigt 体描述的粘弹性本构关系^[3],可得到包含应变率效应的泡沫塑料拉伸应力-应变关系;并且还可得到开孔泡沫塑料弹性模量及泊松比等力学参数对应变、应变率等因素的依赖关系。

1 关于 Lederman 模型的推导

讨论采用 Lederman 给出的泡沫体模型的假设,并取文献[2]中图 1 的微元体进行分析.讨论中考虑两部分应力,一部分是与面元 dA 相交的杆传递的应力,另一部分是与面元 dA 相交的球上杆所传递的应力.通过定义与细杆方向 s 有关的立体角,并引入杆单元的方向分布函数 p ,Lederman 确定了立体角 $d\omega$ 内与面元 dA 相交的杆数 N_B 和球数 N_s .进而假设刚性小球的直径为 D ,上面连接有 n 根杆,则得到与相截球有关的杆数为: $N_{BS} = (\pi/2)N_s$.由此得到在 s 方向与 dA 相交并传递应力的实际杆数为: $N_B + N_{BS}$.根据杆的受力情况可以得到 s 方向上所有杆单元在某一方向 r 上的作用应力,然后,在 2π 立体角内积分便得到所有方向杆单元在 dA 上产生的沿 r 方向的应力 T_r^* ,即

$$T_r^* = \kappa l a (1 + \beta) \int_{2\pi} f s_\mu s_r p d\omega \quad (1)$$

其中, $\underline{\mu}$ 为面元 dA 的法向单位矢量. κ 为单位体积内的杆数, l 为细杆长度, a 为细杆横截面积,结构参数 $\beta = D/l$, f 为细杆中的应力; $s_\mu = \underline{s} \cdot \underline{\mu}$; $s_r = \underline{s} \cdot \underline{r}$;对于单轴拉伸的受力情况,由上式可以写出沿拉伸轴和垂直于拉伸轴的应力为

$$\sigma = \kappa l a (1 + \beta) \int_{2\pi} p f \cos^2 \theta d\omega \quad (2a)$$

$$\sigma_t = \kappa l a (1 + \beta) \int_{2\pi} p f \sin^2 \theta d\omega \quad (2b)$$

其中 σ 为沿拉伸轴的应力, 而 σ_t 为垂直于拉伸轴的应力, θ 为变形后的细杆与拉伸轴之间的夹角(见文献[2]的图 2). 在 Lederman 的讨论中假设 f 是细杆伸长比 λ_1 的函数, 它与拉伸试样的宏观伸长比 λ (轴向) 和 λ_t (横向) 及变形后细杆的指向角 θ 有关. 这一关系通过假设变形过程中刚性球的运动符合仿射变换来得到, 即

$$\lambda_1^2 = [\lambda_t(1 + \beta) - \beta]^2 / (1 - \alpha^2 \cos^2 \theta) \quad (3)$$

$$\text{其中} \quad \alpha^2 = 1 - K^2 = 1 - [\lambda_t(1 + \beta) - \beta]^2 / [\lambda(1 + \beta) - \beta]^2 \quad (4)$$

通常细杆单元的方向分布函数由变形前细杆与拉伸轴的夹角给出, 记为 $p_u(\theta')$; $p(\theta)$ 与 $p_u(\theta')$ 的关系通过等概率条件求出

$$p(\theta) \sin \theta = p_u(\theta'(\theta)) \sin \theta' (d\theta' / d\theta) \quad (5)$$

而 θ' 与 θ 之间的关系确定为

$$\operatorname{tg} \theta = K \operatorname{tg} \theta' \quad (6)$$

考虑(6)式的关系便得到

$$p(\theta) = K p_u(\theta'(\theta)) / [1 - \alpha^2 \cos^2 \theta]^{3/2} \quad (7)$$

最后把(7)式代入(2)式, 并用 $[3\beta^2 / (1 + \beta)^3] (na / \pi D^2)$ 代替 $\kappa l a$, 同时要求垂直于拉伸轴的应力为零, 有

$$\sigma = 2\pi [3\beta^2 / (1 + \beta)^2] (na / \pi D^2) K \int_0^{\pi/2} [f(\lambda_1) \cos^2 \theta \sin \theta / (1 - \alpha^2 \cos^2 \theta)^{3/2}] p_u(\theta'(\theta)) d\theta \quad (8a)$$

$$\sigma_t = 2\pi [3\beta^2 / (1 + \beta)^2] (na / \pi D^2) K \int_0^{\pi/2} [f(\lambda_1) \sin^3 \theta / (1 - \alpha^2 \cos^2 \theta)^{3/2}] p_u(\theta'(\theta)) d\theta = 0 \quad (8b)$$

上面得到的结果即为 Lederman 模型的一般形式.

2 计及应变率效应的本构关系

Lederman 的讨论假设基体材料是线弹性的, 而本文则考虑了基体材料为线性粘弹性的情况, 并假设它的性质可由 Voigt 体来描述. 这样对于非定向泡沫塑料来说, 其细杆应力和杆的方向分布函数可以写为

$$f = f(\lambda_1, d\lambda_1/dt) = E(\lambda_1 - 1) + \eta d\lambda_1/dt \quad (9)$$

$$p_u = 1/2\pi \quad (10)$$

式中 E 为基体材料弹性模量, η 为粘度. 原则上讲, 由(9), (10)式代入(8)式便可得到泡沫塑料受拉伸时的率相关本构关系. 然而, 完成(8)式的积分需要将 λ_1 , $d\lambda_1/dt$ 表示为宏观伸长比 λ , λ_t 和角度 θ 等参数的函数. 显然, λ_1 可直接由(3)式求出, 而 $d\lambda_1/dt$ 根据(3)式对时间求导数并考虑运动学关系来得到, 即

$$\begin{aligned} (d\lambda_1/dt) = & \{ [K(d\lambda/dt)(1 + \beta) \cos^2 \theta (K^2 - \alpha^2 \sin^2 \theta)] \\ & + [(d\lambda_t/dt)(1 + \beta) \sin^2 \theta (1 + \alpha^2 \cos^2 \theta)] \} / (1 - \alpha^2 \cos^2 \theta)^{3/2} \end{aligned} \quad (11)$$

最后,将 $\lambda_1, d\lambda_1/dt$ 的关系代入(8a)式后积分得出

$$\sigma = [3\beta^2/(1+\beta)^2](na/\pi D^2)K\{\sigma_{[1]} + \sigma_{[2]} + \sigma_{[3]} + \sigma_{[4]}\} \quad (12)$$

而

$$\sigma_{[1]} = E[\lambda_t(1+\beta) - \beta]\{1/[2\alpha^2(1-\alpha^2)] - \ln[(1+\alpha)/(1-\alpha)]/(4\alpha^3)\} \quad (13)$$

$$\sigma_{[2]} = -E\{1/[\alpha^2(1-\alpha^2)^{1/2}] - (1/\alpha^3)\arcsin\alpha\} \quad (14)$$

$$\sigma_{[3]} = \eta(d\lambda/dt)(1+\beta)\{-9(1-\alpha^2)^{1/2}/(4\alpha^4)\} + [(9-3\alpha^2)(1-\alpha^2)^{1/2} \ln[(1+\alpha)/(1-\alpha)]/(8\alpha^5)] \quad (15)$$

$$\sigma_{[4]} = \eta(d\lambda_t/dt)(1+\beta)\{(9-7\alpha^2)/[4\alpha^4(1-\alpha^2)] + (\alpha^2-9)\ln[(1+\alpha)/(1-\alpha)]/(8\alpha^5)\} \quad (16)$$

由(8b)得到

$$\sigma_t = \sigma_t^{[1]} + \sigma_t^{[2]} + \sigma_t^{[3]} + \sigma_t^{[4]} = 0 \quad (17)$$

其中

$$\sigma_t^{[1]} = E[\lambda_t(1+\beta) - \beta]\{-1/(2\alpha^2) + [(1+\alpha^2) \ln[(1+\alpha)/(1-\alpha)]/(4\alpha^3)]\} \quad (18)$$

$$\sigma_t^{[2]} = E\{-\arcsin\alpha/\alpha^3\} + (1-\alpha^2)^{1/2}/\alpha^2 \quad (19)$$

$$\sigma_t^{[3]} = \eta(d\lambda_t/dt)(1+\beta)\{(9-\alpha^2)(1-\alpha^2)^{1/2}/(4\alpha^4)\} + [(\alpha^4+4\alpha^2-9)(1-\alpha^2)^{1/2}\ln[(1+\alpha)/(1-\alpha)]/(8\alpha^5)] \quad (20)$$

$$\sigma_t^{[4]} = \eta(d\lambda_t/dt)(1+\beta)\{-(\alpha^2+9)/4 + [(\alpha^4-2\alpha^2+9) \ln[(1+\alpha)/(1-\alpha)]/8\alpha^5]\} \quad (21)$$

以上给出了基体材料为线性粘弹性时开孔泡沫塑料受单轴拉伸作用的本构关系. 为应用方便,需对上述关系进行一些简化和近似. 为此假设只有应变的平方项及以下的各项对应力有贡献,同时考虑到 $\lambda = 1 + \epsilon$, $\lambda_t = 1 - \nu_f \epsilon$ 和(4)式,则在本构关系中只保留 α^4 及以下各项(因为 $\alpha^4 \approx 4(1+\nu_f)^2(1+\beta)^2\epsilon^2$, 这里 ν_f 为泡沫塑料的泊松比). 这样经近似处理(忽略 ϵ^2 以上各项)后得

$$\begin{aligned} \sigma = & (1-2\nu_f/3)[3\beta^2/(1+\beta)](na/\pi D^2)[E\epsilon + \eta d\epsilon/dt]/5 \\ & + (\beta^2/35)(na/\pi D^2)(1+\nu_f)[(15-13\nu_f)E\epsilon^2 - (6+34\nu_f)\eta\epsilon \\ & (d\epsilon/dt) - (48\nu_f^2+23\nu_f+3)(1+\beta)\eta(d\epsilon/dt)\epsilon^2] \end{aligned} \quad (22)$$

由此可见,当只考虑 ϵ 的二次非线性近似时,泡沫塑料的本构关系可表示成

$$\sigma = A\epsilon + B(d\epsilon/dt) + C\epsilon^2 + G\epsilon(d\epsilon/dt) + F(d\epsilon/dt)\epsilon^2 \quad (23)$$

上述本构关系中应变与应变率耦合在一起,反映了几何非线性的影响;这一关系可用于较大应变和应变率的情况(对较大应变,可存在更高阶的耦合项),并期待用于拟合开孔泡沫塑料的拉伸应力-应变曲线. 当应变和应变率较小时,近似地有

$$\sigma = A\epsilon + B(d\epsilon/dt) + G\epsilon(d\epsilon/dt) \quad (24)$$

可见,此时仍表现出应变和应变率的耦合效应,这是 Lederman 模型结果所无法描述的,也是泡沫塑料所表现的力学性能与相应实体材料力学性能的一个主要差异. 显然,耦合项的影响在应变率较高时更为明显.

现在考虑由 $\sigma_t = 0$ 导出的条件. 根据(18)至(21)及(17)得到

$$\begin{aligned} & 7E\varepsilon(1 - 4\nu_f) + 7\eta(d\varepsilon/dt)(1 - 4\nu_f) - \eta\varepsilon(d\varepsilon/dt)(1 + \beta)(1 + \nu_f) \\ & (11 + 32\nu_f) + E\varepsilon^2(1 + \beta)(1 + \nu_f)(3 - 18\nu_f) + \eta\varepsilon^2(d\varepsilon/dt)(1 + \beta)^2 \\ & (1 + \nu_f)(5 - 6\nu_f - 32\nu_f^2) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

上式确定了泡沫塑料材料常数、基体材料常数、泡沫塑料胞体结构参数和应变、应变率之间的关系. 显然, 当 $(d\varepsilon/dt) = 0$ (对应准静态加载情况) 时, 并且假设小应变情况, 则有: $\nu_f = 1/4$, 这与 Lederman 的结果相同.

3 泡沫塑料的几何非线性效应和应变率效应

3.1 泊松比 ν_f 随应变的变化

泡沫塑料的泊松比是一个非常重要的材料参数, 前人在这方面做了许多工作. 一般说来, 泡沫塑料的泊松比与泡沫的胞体结构有着最密切的关系^[4]; 对于具有粘弹性特征的泡沫塑料, 其泊松比与加载时间有关. Rinde 根据拉伸变形过程中的体积变化测量了泊松比, 并得出泡沫塑料拉伸时的泊松比与应变无关的结论^[5]. 我们认为 Rinde 的结论只适用应变非常小的情况, 对于较大的应变, 可以由(25)式给出泡沫塑料泊松比的估计值; 此时若不考虑应变率的效应(为简单起见), 则由(25)式得到泊松比所满足的条件如下(设 $\nu_f = x + 1/4$)

$$x^2 + [12 + (14/\varepsilon)(1 + \beta)]x/9 + (15/144) = 0 \quad (26)$$

由上式可知 $x < 0$, 因此得到下述结论: 即随应变增加泡沫塑料的泊松比下降. 图 1 的结果表明: 在 $0 \leq \varepsilon \leq 0.1$ 范围内, 泊松比的变化范围为: $0.243 \leq \nu_f \leq 0.250$.

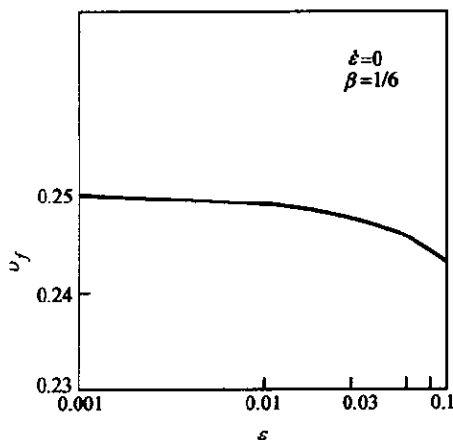


Fig. 1 The variation of poisson's ratio with strain

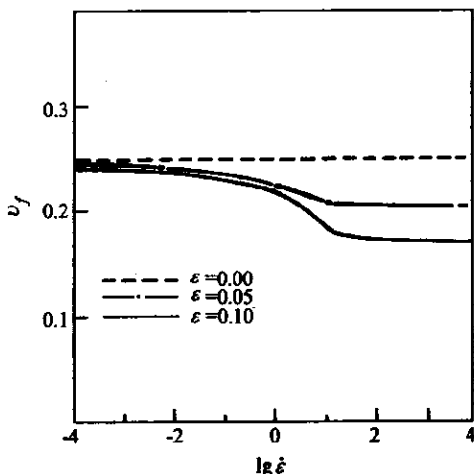


Fig. 2 The variation of poisson's ratio with strain-rate

3.2 泊松比随应变率的变化

将 $\nu_f = x + 1/4$ 代入(25)式发现: 当 $\varepsilon = 0$ 时, 必有 $x = 0$; 说明初始泊松比的大小与应变率无关. 而当 $(d\varepsilon/dt) \rightarrow +\infty$ (非常大), 则可得到

$$x^3 + [2 + 2/\epsilon(1 + \beta)]x^2 + [57 + (236/\epsilon(1 + \beta)) + (112/\epsilon^2(1 + \beta)^2)]x/64 + [(380/\epsilon(1 + \beta)) - 15]/256 = 0 \quad (27)$$

假设 $\epsilon = 0.1$ 时, 泡沫塑料不发生破坏; 并取 $\beta = 1/6$, 则上式又可写为

$$x^3 + 19.143x^2 + 161.069x + 12.665 = 0 \quad (28)$$

解上面方程得到唯一的实根: $x = -0.08$, $v_f = 0.17$; 由此可见: 应变率的增加有使泡沫塑料泊松比降低的作用, 说明较高应变率作用时, 横向变形较小. 更重要的是应变率的影响与泡沫塑料的变形状态有关: 若取 $\epsilon = 0.05$ 计算, 则有 $v_f = 0.207$. 对应相同应变但应变率为零时, $v_f = 0.246$, 可见: 应变率对泊松比的影响随应变增加而增加(见图 2).

3.3 泊松比随结构参数 β 的变化

在前面的讨论中均假设 $\beta = 1/6$, 由(26)式可以得出结论: 不同 β 值将会导致不同的泊松比. 为简单起见, 考虑应变率为零的情况下, β 对泊松比的影响. 在低密度范围内取 $\beta = 1/10$ 和 $1/3$, 由此计算的泊松比为: $v_f = 0.243$ 和 $v_f = 0.242$ (这里 ϵ 取 0.1 计算). 由此可知: 在低应变率情况下, 结构参数基本不影响泊松比的大小. 对于较高应变率情况, 由(27)式计算泊松比(设 $\epsilon = 0.1$)分别为 $v_f = 0.175$ 和 $v_f = 0.161$; 可见较高应变率下泊松比随结构参数变大而减小(见图 3).

3.4 弹性模量随应变、应变率及结构参数的变化

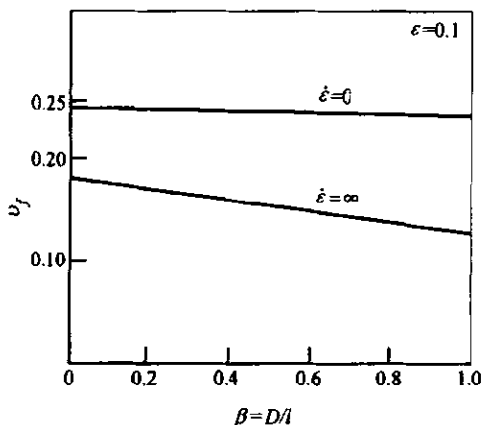


Fig. 3 The variation of poisson's ratio with the structural parameter

对(23)式关于 ϵ 求导数便给出泡沫塑料的弹性模量

$$E_f(\epsilon, d\epsilon/dt, \beta) = (d\sigma/d\epsilon) = A + 2C\epsilon + G(d\epsilon/dt) + 2F\epsilon(d\epsilon/dt) \quad (29)$$

若 A, C, G, F 等参数近似看作常数, 则可以得到泡沫塑料弹性模量是应变和应变率的双线性形式. 由于 $G = -\beta^2(na/\pi D^2)(1 + v_f)(6 + 34v_f)\eta/35 < 0$, $F = -\beta^2(na/\pi D^2)(1 + v_f)(48v_f^2 + 23v_f + 3)(1 + \beta)\eta/35 < 0$; 所以, 在应变为常值时, 泡沫塑料拉伸模量是应变率的线性函数, 并随应变率的增加可能会导致模量的降低; 但考虑到 η 与 $d\epsilon/dt$ 在一定范围内成反比, 所以模量

在此范围内似乎与应变率没有多大关系. 当 $\epsilon = 0$ 时, 可见泡沫塑料的初始模量由于粘性效应而降低. 对于应变率为常值的情况: 若 $(2F(d\epsilon/dt) + 2C) < 0$, 则随应变增加泡沫塑料模量减少; 反之, 则随应变增加泡沫塑料模量也会增加. 此外, β 参数的变化也会影响模量的变化.

综上所述, 本文通过考虑泡沫塑料基体的粘弹性性质, 将 Lederman 模型推广到更为一般的情况. 它不仅可以退化到 Lederman 模型的结果, 而且可用于描述开孔泡沫塑料的应变率相关的本构行为. 此外, 考虑基体的粘弹性性质符合实际高分子材料的力学行为, 因而比 Lederman 模型更具有实用价值. 然而, 同 Lederman 模型一样, 本文模型在应用中

也涉及胞体结构参数和细杆指向分布函数的确定,故给应用带来不便.作为一种理论探讨,本文模型提出了应变和应变率的耦合效应,这一结果是前人的模型所无法描述的,它与 Bigg^[6]经验模型描述的耦合效应相一致;并且本文给出的(23)式与 Bigg 经验模型十分相象,所以本文结果可用于拟合率相关开孔泡沫塑料的拉伸应力-应变曲线.基于本文模型对泡沫塑料泊松比和杨氏模量的讨论符合物理直观的认识,但其正确性仍需实验的进一步验证.

REFERENCES

- 1 Gent A N, Thomas A G. *J Appl Polym Sci*, 1959, 1: 107~113
- 2 Lederman J M. *J Appl Polym Sci*, 1971, 15: 693~703
- 3 Ward I M. *The Mechanical Properties of Solid Polymer* (固态高聚物的力学性能). Beijing (北京): Scientific Press (科学出版社), 1988
- 4 Ko W L. *J Cell Plast*, 1965, 1: 45~50
- 5 Rinde J A. *J Appl Polym Sci*, 1970, 14: 1913~1926
- 6 Biyg D M. *Polym Eng Sci*, 1981, 21: 548~556

THE STRAIN-RATE DEPENDENT CONSTITUTIVE RELATION AND MECHANICAL PROPERTIES OF OPEN-CELL FOAM PLASTICS IN TENSION

LU Zixing

(*Institute of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083*)

HUANG Zhuping, WANG Ren

(*Department of Mechanics, Peking University, Beijing 100871*)

Abstract On the basis of Lederman's model, the strain-rate dependent constitutive relation of open-cell foam plastics is derived by supposing the matrix material to be Voigt's visco-elastic body. By means of the constitutive relation, the dependence of some mechanical properties of foam plastics on the strain, strain-rate and parameter of cell structure is investigated in this paper. The results have shown that the decrease of Poisson's ratio of foam plastics is more obvious with the increase of strain-rate than the one with the change of other two factors. In addition, the Young's modulus of foam plastics is reduced by introducing viscous effect.

Key words The mechanical properties of material, Visco-elastic property, Foam plastics